Eq. de Hamilton-Jacobi

Motivação: vimos anteriormente que a transformação canônica gerada pela ação S leva as variáveis canônicas $q(t), p(t)$ de um sistema dinâmico para valores constantes $Q_i \equiv q_i(t_0) \equiv \beta_i$, $P_i \equiv p_i(t_0) \equiv \alpha_i$. A questão é que não é evidente, a priori, como construir a função S que realiza isso. A teoria de Hamilton-Jacobi essencialmente substitui o problema de resolver as eqs. de movimento por outro: resolver uma equação (diferencial parcial), a equação de Hamilton-Jacobi, cuja solução é S.

Um pouco mais explicitamente: suponha que exista uma função geradora $S(q,P,t)$ tal que o novo Hamiltoniano seja $K(Q,P)=0$. Nesse caso, de fato $Q_i = \beta_i$; $P_i = \alpha_i$. Como S é do tipo F_2, para isto ocorrer é preciso

$$H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Ainda $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, portanto: $\boxed{H\left(q_1 \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$ eq. de Hamilton-Jacobi

Dado H, se resolvemos essa eq. encontramos $S(q,P,t)$. Daí podemos impor que $Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$ e, em princípio, inverter e obter $q(Q,P,t)$ e também $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$. Como os Q's, P's são constantes, o problema dinâmico fica resolvido! Claro que, em geral, essa eq. é não-linear e muito difícil de resolver.

Na verdade, não precisamos encontrar uma solução <u>geral</u> $S(q,P,t)$. Como queremos situações em que P_i serão constantes, é suficiente procurarmos soluções particulares da forma $S(q,\alpha_1,\dots\alpha_n,t)$, onde $P_i=\alpha_i$ são constantes. Vale notar que, como a eq. de HJ só depende de derivadas de S, toda solução só está definida a menos de uma constante adicional aditiva α_{n+1}, então as n constantes $\alpha_1\dots\alpha_n$ não podem ser deste tipo.

Assim, mais rigorosamente: consideremos uma <u>solução completa</u> da eq. de HJ uma função $S(q_1\dots q_n,\alpha_1,\dots\alpha_n,t)$ satisfazendo $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_j}\right)\neq 0$ [matriz $n\times n$]

[p/ garantir que α_i's são mutuamente independentes, e tb que q_i's podem ser escritos em função de α_i's e β_i's]

Nesse caso:

Teorema de Jacobi: os q_s e p_s determinados da maneira acima satisfazem as eqs. de Hamilton p/ H.

Dem: como $\beta_i=\frac{\partial S}{\partial\alpha_i}$, então: $0=\dot\beta_i=\sum_j\frac{\partial^2 S}{\partial q_j\partial\alpha_i}\dot q_j+\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial\alpha_i}$

$p_j=\frac{\partial S}{\partial q_j}$

Por outro lado: da eq. de HJ: $0=\sum_j\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i\partial t}=\sum_j\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i\partial q_j}+\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i\partial t}$

$\rightarrow\sum_j\frac{\partial^2 S}{\partial q_j\partial\alpha_i}\left(\dot q_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)=0 \Leftrightarrow \quad = 0 \qquad A_{ij}=\frac{\partial^2 S}{\partial q_j\partial\alpha_i}\xrightarrow{\text{como }\det\neq 0}\boxed{\dot q_j=\frac{\partial H}{\partial\alpha_i}}$

Igualmente: $\dot{p}_i = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i}$

Mas da eq. de HJ: $\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{\dot{q}_j\text{, pelo acima}} \overbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}^{= \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} = 0$

$\therefore \boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$

Exemplo: O.H.S.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \text{ eq. HJ}$$

Podemos em geral buscar soluções por separação de variáveis, na forma aditiva

$$S(q,t) = W(q) + T(t)$$

↓ diferente de eqs. lineares de 2ª ordem, onde buscamos muitas vezes soluções tipo produto.

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}_{\text{só dep. de } q} = \underbrace{-\frac{dT}{dt}}_{\text{só dep de } t} = \alpha \quad (\text{const.})$$

$$\therefore \boxed{T(t) = -\alpha t} + \cancel{\alpha_2} \text{ constante aditiva} \rightarrow \text{irrelevante} \quad \Rightarrow \frac{dW}{dq} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}$$

$$\longrightarrow W = \int \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}\, dq = \sqrt{2m\alpha}\int\sqrt{1 - bq^2}\,dq, \quad b = \frac{m\omega^2}{2\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\left[q\sqrt{1-bq^2} + \frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathrm{asen}(\sqrt{b}\,q)\right]$$

Wolfram Alpha:

$$\int \sqrt{1-bx^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-bx^2} + \frac{\sin^{-1}(\sqrt{b}\,x)}{\sqrt{b}}\right) + \text{constant}$$

$$\Rightarrow Q = \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} - t = m\int\frac{dq}{\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}} - t = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{asen}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}\,q\right) - t$$

→ é mais rápido derivar 1º dentro da integral do que obter a solução a partir da fórmula integrada de W

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \overset{\varphi}{\overset{|||}{\omega\beta}}\right)}$$

$$\text{tb: } p(t) = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha}\sqrt{1 - bq^2} = \sqrt{2m\alpha}\cos(\omega t + \varphi)$$